全実行可能解におけるBCQ判定方法とその応用 (非線形解析学と凸解析学の研究)

山本, 俊輔; 原田, 涼平; 黒岩, 大史

数理解析研究所講究録
第 1841 巻 2013 年 129-134

全実行可能解におけるBCQ判定方法とその応用

島根大学大学院 総合理工学研究科　山本 俊輔 (SHUNSUKE YAMAMOTO)
Interdisciplinary Graduate School of Science and Engineering, Shimane University
島根大学大学院 総合理工学研究科　原田 涼平 (RYOHEI HARADA)
Interdisciplinary Graduate School of Science and Engineering, Shimane University
島根大学大学院 総合理工学研究科　黒岩 大史 (DAISHI KUROIWA)
Major in Interdisciplinary Science and Engineering, Shimane University

概要

本論文では，全実行可能解における BCQ の判定に関する結果（[2]）について紹介し，infimal convolution で表現された関数についての結果（[3]）とその応用例について述べる。

1　はじめに

本論文では以下の凸計画問題について考える：

$$(\mathrm{P})\begin{cases}\text{最小化} & f(x)\\ \text{条件} & g_i(x)\leq 0,\ \forall i\in I,\end{cases}$$

ただし，I : 有限集合，$f, g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(i \in I)$ は凸関数とする。この問題に対して，最適解を考察する際に重要となるのが制約想定である。一般に，制約想定は制約関数に関する仮定であり，劣微分などを用いて表現した条件（KKT 条件など）が，最適性の必要条件となることを保証するための技術的な仮定である。制約想定の研究は凸最適化理論の発展に直結しているため，多くの数学者たちによって研究がなされてきた。

一般に，弱い制約想定の方が目的関数の適応範囲が広いとされているため，より弱い制約想定を見つける研究が行われてきた。2008 年，basic constraint qualification(BCQ) という制約想定が，凸計画問題において解の最適性に関する必要十分な制約想定であることが Li, Ng, Pong によって示された。この結果は，「BCQ よりも弱い仮定の下では，最適性条件が成立しない目的関数が存在する」ことを述べており，非常に興味深い。しかしながら，全ての実行可能解において BCQ の判定を行うには，それぞれの点における劣微分と法線錐を計算しなければならない

ため，非常に手間がかかる。従って，よりシンプルにBCQを判定する方法の研究が望まれていた。

最近 [2] において，それぞれの点における劣微分と法線錐を計算することなくBCQを判定する方法が与えられた。この論文では，$\mathrm{coneco} \bigcup_{i \in I} \mathrm{epi} g^*$ を計算することで，全実行可能解毎のBCQの判定が可能となることが示されている。この方法では視覚的にBCQを判定することが可能であるため，特に $n \leq 2$ ならば $\mathrm{coneco} \bigcup_{i \in I} \mathrm{epi} g^*$ を図示することにより，実際のBCQの判定は行い易い。しかしながら，$n \geq 3$ のときには $\mathrm{coneco} \bigcup_{i \in I} \mathrm{epi} g^*$ の図示自体が難しいため，従ってBCQの判定は困難であった。このような状況の下，[3] においては，次元 n に関わらずBCQ判定が可能となる関数のクラス，特にinfimal convolutionを用いSlater条件が成立しない凸関数について研究が行われた。

本原稿では，主に [2, 3] の結果について紹介する。第2章では準備として，凸解析に関する基本的な概念と，[2] の結果を含め，過去の結果について述べる。第3章では，imfimal convolutionを用いた関数に対して得られた [3] の結果について紹介し，具体例等について述べる。

2 準備

集合 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ の閉包，内部，境界，錐包，凸包をそれぞれ $\mathrm{cl}\, A$, $\mathrm{int}\, A$, $\mathrm{bd}\, A$, $\mathrm{cone}\, A$, $\mathrm{co}\, A$ と表記する。f を $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}$ への関数とする。f が凸関数であるとは，任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in (0,1)$ に対して，$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$ となることをいう。$\mathrm{epi}\, f = \{(x,r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq r\}$ を f のエピグラフ，$\mathrm{dom}\, f = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < +\infty\}$ を f の実効定義域という。f を凸関数とするとき，f の共役関数 $f^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ を以下のように定義する。

$$f^*(u) = \sup\{\langle u, x \rangle - f(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$$

なお $\langle u, x \rangle$ は二つのベクトル u と x の内積である。$x \in \mathbb{R}^n$ における f の劣微分は以下のように定義される。

$$\partial f(x) = \{z \in \mathbb{R}^n \mid f(x) + \langle z, y - x \rangle \leq f(y), \forall y \in \mathbb{R}^n\}$$

凸関数 g, h に対して，g と h のinfimal convolutionを以下のように定義する。

$$(g \oplus h)(x) := \inf_{x_1 + x_2 = x} \{g(x_1) + h(x_2)\}$$

$\mathrm{dom}\, g \cap \mathrm{dom}\, h \neq \emptyset$ ならば $(g \oplus h)^* = g^* + h^*$ であることが知られている。集合 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ に対して

$$\delta_A(x) = \begin{cases} 0 & (x \in A) \\ +\infty & (x \notin A) \end{cases}$$

で定義される関数 $\delta_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ を A の標示関数という。A を凸集合とするとき，任意の $x \in A$ に対して，A の法線錐 $N_A(x)$ を以下のように定義する。

$$N_A(x) = \{z \in \mathbb{R}^n \mid \langle z, y - x \rangle \leq 0, \forall y \in A\}$$

この章において，以後，$\{g_i \mid i \in I\}$ を凸関数族とし，$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leq 0, \forall i \in I\}$ とする。$\{g_i \mid i \in I\}$ が $\bar{x} \in S$ において basic constraint qualification(BCQ) を満たすとは,

$$N_S(\bar{x}) = \operatorname{cone}\operatorname{co}\bigcup_{i \in I(\bar{x})} \partial g_i(\bar{x})$$

が成立することをいう。ただし，$I(\bar{x}) = \{i \in I \mid g_i(\bar{x}) = 0, \forall i \in I\}$ である。$\bar{x} \in \operatorname{int} S$ ならば, $\bar{x}$ においてBCQを満たすことが知られている。以下はBCQに関する結果である。

定理 2.1. ([1]) $\bar{x} \in S$ とする。このとき次の (A) と (B) は同値:

(A) $\{g_i \mid i \in I\}$ が $\bar{x}$ においてBCQを満たす。

(B) 任意の凸関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ に対して，次の (i) と (ii) は同値:

- (i) $\bar{x}$ が (P) の最適解である。
- (ii) ある $\lambda_i \geq 0$ $(i \in I)$ が存在して, $\begin{cases} 0 \in \partial f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \partial g_i(\bar{x}), \\ \lambda_i g_i(\bar{x}) = 0, \ \forall i \in I. \end{cases}$

この定理はBCQが凸計画問題における大域的最適性の必要条件のための必要十分な制約想定であることを示している。BCQが成立しているかどうかを調べるためには，g_i の劣微分と法線錐を求める必要がある。しかしながら，全ての実行可能解においてBCQが成立しているかどうかを判定するのは非常に手間がかかる。この問題に対して，[2] では次の結果を得た。

定理 2.2. ([2]) $\bar{x}$ は (P) の実行可能解とする。このとき次の (i) と (ii) は同値:

(i) 関数族 $\{g_i \mid i \in I\}$ が $\bar{x}$ においてBCQを満たす。

(ii) $$\left\{ y \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, (y, \langle y, \bar{x} \rangle) \in \operatorname{cl}\operatorname{cone}\operatorname{co}\bigcup_{i \in I} \operatorname{epi} g_i^* \right\} \subseteq \left\{ y \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, (y, \langle y, \bar{x} \rangle) \in \operatorname{cone}\operatorname{co}\bigcup_{i \in I} \operatorname{epi} g_i^* \right\}.$$

この定理を用いることで，全ての実効可能解においてBCQを判定する場合においても，それぞれの点における g_i の劣微分と法線錐を求める必要はなく，$\bigcup_{i \in I} \operatorname{epi} g^*$ の錐凸包と線形関数 $\langle \cdot, \bar{x} \rangle$ のグラフの共通部分を調べることでBCQの判定が可能になった。

例 2.1. 次のような凸関数 $g(x_1, x_2) = g_1(x_1) + g_2(x_2)$ について考える。ただし,

$$g_j(x_j) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x_j+1)^2 & x_j \in (-\infty, -1], \\ 0 & x_j \in (-1, 1), \\ \frac{1}{2}(x_j-1)^2 & x_j \in [1, +\infty). \end{cases}$$

このとき $S = [-1, 1]^2$ であり,

$$g^*(y_1, y_2) = \frac{1}{2}y_1^2 + |y_1| + \frac{1}{2}y_2^2 + |y_2|$$

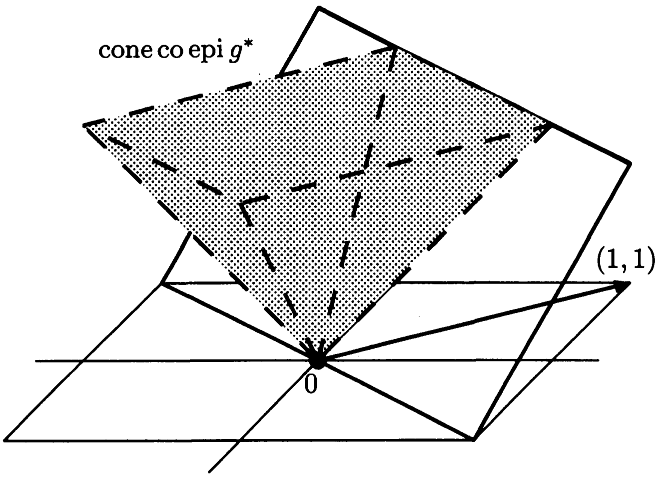
が得られる。よって,

$$\mathrm{cone\,co\,epi}\, g_2^* = \{(y_1, y_2, r) \in \mathbb{R}^3 \mid |y_1| + |y_2| < r\} \cup \{(0,0,0)\}$$

となるが,

$$\mathrm{cl\,cone\,co\,epi}\, g_2^* = \{(y_1, y_2, r) \in \mathbb{R}^3 \mid |y_1| + |y_2| \leq r\}$$

である。



したがって, int S の各点で BCQ を満たすが bd$S$ の各点で BCQ を満たさない。

このように観察が可能となったのは, この例では $n = 2$ であったからである。例 2.1 のように $n \leq 2$ ならば cone co $\bigcup_{i \in I}$ epig^* の図示は可能であるが, しかし, $n \geq 3$ のときは cone co $\bigcup_{i \in I}$ epig^* を図示することが難しいため, [2] の方法では BCQ 判定が容易とはならない。

3 infimal convolution を用いた BCQ の判定

本章では, [3] で得られた次元 n に関わらず BCQ 判定が可能となる関数のクラスについての研究を紹介する。infimal convolution は, 共役関数について,

$$\operatorname{dom} g \cap \operatorname{dom} h \neq \emptyset \text{ ならば } (g \oplus h)^* = g^* + h^*$$

というよい性質を持っている。そこで [3] では，凸関数 $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ と δ_A の infimal convolution $h \oplus \delta_A$ を考え，BCQ が成立するための条件を考察した。

定理 3.1. ([3]) S を $\mathbb{R}^n$ の空でない閉凸集合, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を凸関数で $h(0) = 0$, $h(x) > 0$ $(\forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ とする。$g = h \oplus \delta_S$, $\bar{x} \in \operatorname{bd} S$ とするとき，次の (i) と (ii) は同値：

(i) $N_S(\bar{x}) \subseteq \operatorname{cone} \partial h(0)$.

(ii) $\{g\}$ が $\bar{x}$ において BCQ を満たす。

この定理を用いて解決できる例を紹介する。

例 3.1. $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}^n$: 閉凸集合，$h(x) = a\|x\|^p$ $(a > 0, p \geq 1)$, $g = h \oplus \delta_S$, $\bar{x} \in \operatorname{bd} S$ とする。

$$\partial h(0) = \begin{cases} B(0,a) & p = 1 \\ \{0\} & \text{その他} \end{cases}$$

ただし，$B(0,a)$ は原点中心半径 a の球である。したがって,

$$\operatorname{cone} \partial h(0) = \begin{cases} \mathbb{R}^n & p = 1 \\ \{0\} & \text{その他} \end{cases}$$

となる。よって $p = 1$ ならば，$N_S(\bar{x}) \subseteq \operatorname{cone} \partial h(0)$ となり，$\{g\}$ は $\bar{x}$ において BCQ を満たす。また $N_S(\bar{x}) \neq \{0\}$ であるので，$p > 1$ ならば $\{g\}$ は $\bar{x}$ において BCQ を満たさない。

例 3.2. $S = [-1,1]^2$, $h(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$, $g = h \oplus \delta_S$, $\bar{x} \in \operatorname{bd} S$ とする。

$$h(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\|(x_1, x_2)\|^2$$

であるから，例 3.1 より，$\{g\}$ は $\bar{x}$ において BCQ を満たさない。

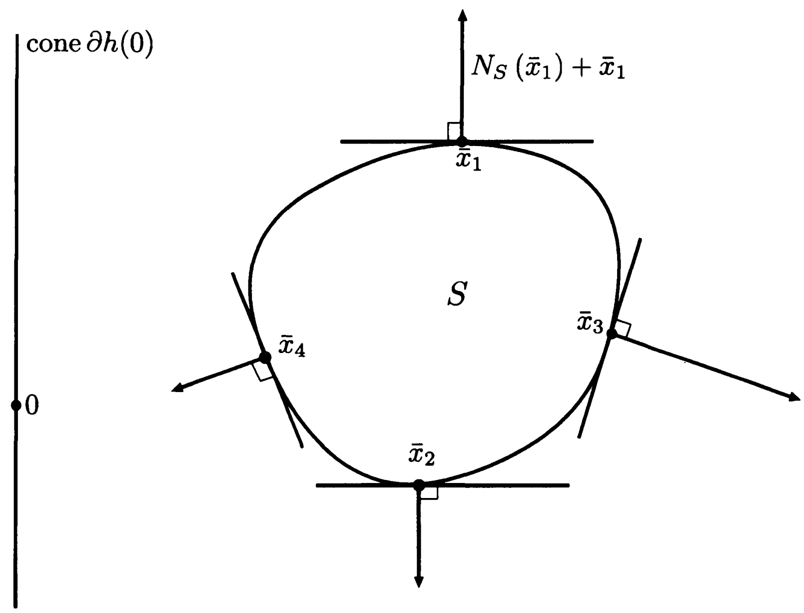
例 3.3. $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}^2$: 閉凸集合，$h(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + |x_2|$, $g = h \oplus \delta_S$, $\bar{x} \in \operatorname{bd} S$ とする。

$$\partial h(0) = \{0\} \times [-1, 1]$$

より,

$$\operatorname{cone} \partial h(0) = \{0\} \times \mathbb{R}$$

である。よって下の図より，$\{g\}$ は $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ において BCQ を満たし，それ以外の点では BCQ を満たさない。



最後に，定理 3.1 を拡張した結果について述べる。

定理 3.2. ([3]) I を有限集合，$g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を凸関数, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を凸関数で，$h(0) = 0$, $h(x) > 0$ $(\forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ とする。もしある $\bar{x} \in S$ の近傍内で $h \oplus \delta_S \leq \sup_{i \in I} g_i$ が成り立つならば、次が成立する：

$$N_S(\bar{x}) \subseteq \operatorname{cone} \partial h(0) \Rightarrow \{g_i \mid i \in I\} \text{ が } \bar{x} \text{ において BCQ を満たす。}$$

参考文献

[1] C. Li, K. F. Ng and T. K. Pong, Constraint qualifications for convex inequality system with applications in constrained optimization, SIAM J. Optim. vol. 19 (2008), No. 1, 163–187.

[2] S. Yamamoto, S. Suzuki and D. Kuroiwa, A simple method to verify the basic constraint qualification at every feasible solution, preprint.

[3] S. Yamamoto, D. Kuroiwa, Checking the basic constraint qualification at every feasible solution of certain convex functions, preprint.